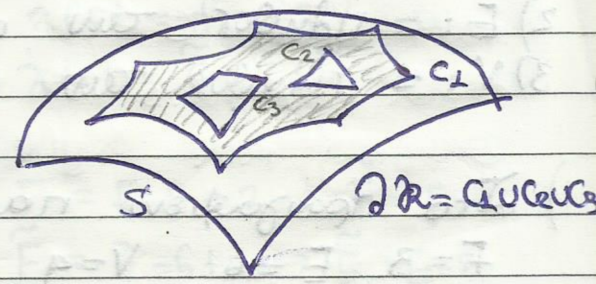
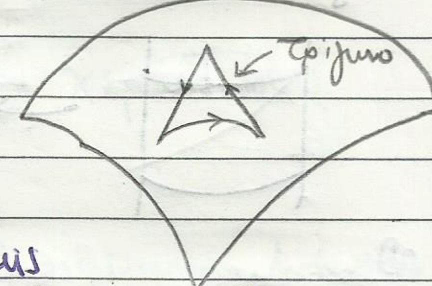
Ορισμός

Ένα σύνολο $R \subset S$ καλείται <u>κανονική περιοχή</u> αν είναι συμπαγές με σύνορο το οποίο αποτελείται από ξένη ένωση απλών κλειστών κατά τμήματα κανονικών καμπυλών πεπερασμένου πλήθους



Παραδείγματα κανονικών περιοχών

1) Οι απλές περιοχές
2) Κάθε συμπαγής επιφάνεια είναι κανονική περιοχή με σύνορο ίσο με το $\emptyset$
3) <u>Τρίγωνα</u>: απλές περιοχές με ακριβώς τρεις κορυφές.



Τριγωνοποιήσεις κανονικών περιοχών

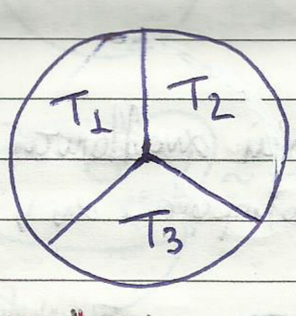
Ορισμός

Ονομάζουμε τριγωνοποίηση μιας κανονικής περιοχής κάθε πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$ τέτοια ώστε

i) $\bigcup_i T_i = R$

ii) Αν $T_i \cap T_j \neq \emptyset,\ i \neq j \Rightarrow T_i \cap T_j =$ κορυφή ή πλευρά

<u>πχ</u> (τριγωνοποίηση του δίσκου)



Θεώρημα:

Κάθε κανονική περιοχή δέχεται τουλάχιστον μία τριγωνοποίηση (και άρα άπειρες)

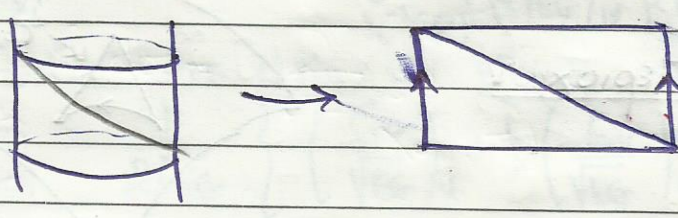
Ορισμός

Για κάθε τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ κανονικής περιοχής R ορίζονται οι ακόλουθοι ορισμοί:

1) $F :=$ πλήθος των τριγώνων της $\mathcal{T}$ $(F(\mathcal{T}))$
2) $E :=$ πλήθος των ακμών της $\mathcal{T}$ $(E(\mathcal{T}))$
3) $V :=$ πλήθος των κορυφών της $\mathcal{T}$ $(V(\mathcal{T}))$

1) Στο προηγούμενο παράδειγμα με τον κύκλο με το σύνορο.
$F=3$, $E=6$, $V=4$

2) **Παράδειγμα**
Ξετυλίγουμε έναν κύλινδρο



$F=2$
$E=4$
$V=2$

Θεώρημα

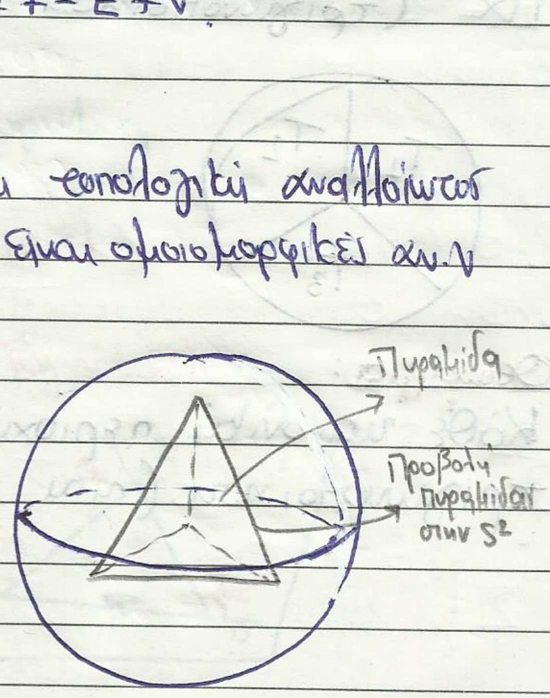
Έστω $\mathcal{T}=\{T_1,\dots,T_F\}$ τριγωνοποίηση κανονικής περιοχής R. Τότε ο αριθμός $F(\mathcal{T})-E(\mathcal{T})+V(\mathcal{T})$ είναι ανεξάρτητος της τριγωνοποίησης (δηλ. εξαρτάται μόνο από την R) και καλείται χαρακτηριστική Euler-Poincaré και συμβολίζεται με $\chi(R)=F-E+V$.

Θεώρημα

Η χαρακτηριστική Euler-Poincare είναι τοπολογική αναλλοίωτος. Δύο συμπαγείς επιφάνειες S_1 & S_2 είναι ομοιομορφικές αν.ν $\chi(S_1)=\chi(S_2)$

3) Πχ

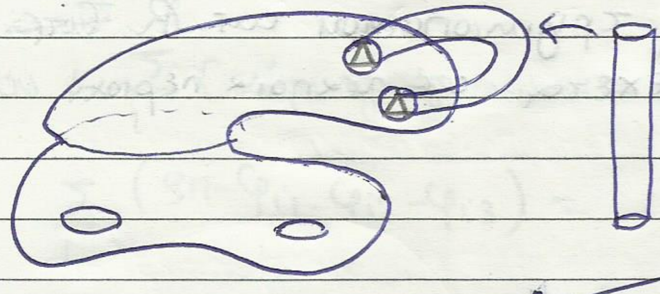
$$\left.\begin{aligned} S&=S^2\\ F&=4\\ E&=6\\ V&=4 \end{aligned}\right\} \chi(S^2)=F-E+V=2$$



Στο (1) πχ → $\chi = 1$
Στο (2) πχ → $\chi = 0$

Ταξινόμηση Κλειστών επιφανειών

Έστω η επιφάνεια S.



$$\chi(S) = F - E + V$$
$$\chi(\tilde{S}) = \tilde{F} - \tilde{E} + \tilde{V}$$

$$\begin{cases} \tilde{F} = F - 2 + 2 \to \tilde{F} = F \\ \tilde{E} = E - 6 + 4 \to \tilde{E} = E - 2 \\ \tilde{V} = V - 6 + 2 \to \tilde{V} = V - 4 \end{cases}$$

$\chi(\tilde{S}) = \chi(S) - 2$, $\quad$ X() $= 2 - 2 = 0$

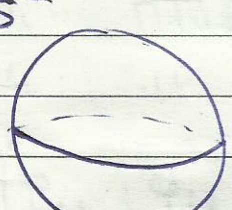
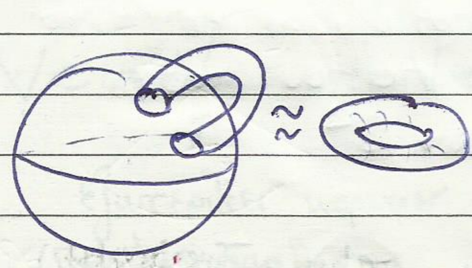
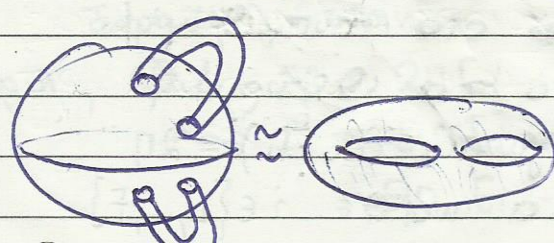
σφαίρα (με χερούλι)

Άρα, $\chi(S) = 2 - 2g(S)$

$g(S) :=$ γένος της επιφάνειας $=$ πλήθη χερουλιών

<u>Θεώρημα</u>

Καθε συμπαγής επιφάνεια είναι ομοιόμορφη με την επιφάνεια που προκύπτει απο την S^2 κολλώντας g χερούλια.

S^2	χ	g	$\chi \in \{2, 0, -2, -4, \dots\}$
	2	0	
	0	1	
	−2	2	

Θεώρημα

Έστω $\{X_a : U_a \subseteq \mathbb{R}^2 \to S\}_{a \in I}$ οικογένεια ορθ. συστημάτων συντεταγμένων του προσανατολισμού μιας επιφάνειας με $\bigcup_{a \in I} X_a(U_a) = S$. Έστω R κανονική περιοχή τότε υπάρχει $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_F\}$ τριγωνοποίηση της R ώστε κάθε τρίγωνο T_i περιέχεται σε κάποια περιοχή συντεταγμένων $X_{a_i}(V_i)$

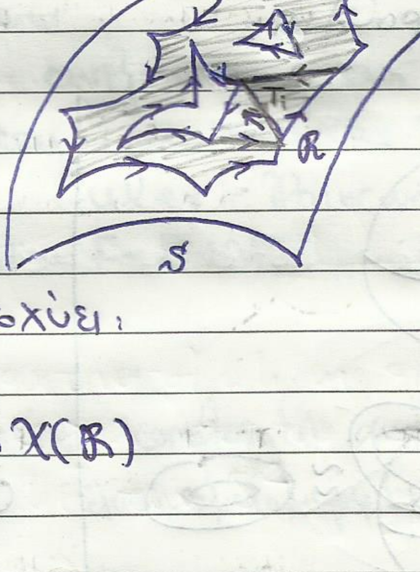
Ολοκλήρωση

Έστω $f : R \subset S \to \mathbb{R}$ συνεχής.
Καλούμε επιφανειακό ολοκλήρωμα της f στην R τον αριθμό:

$$\iint_R f \, d\sigma = \sum_{i=1}^{F} \iint_{X_{a_i}^{-1}(T_i)} f \, d\sigma = \sum_{i=1}^{F} \iint_{X_{a_i}^{-1}(T_i)} f \circ X_i \, \|X_{i,u} \times X_{i,v}\| \, du\,dv$$

Θεώρημα (Gauss-Bonnet)

R κανονική περιοχή (προσανατολισμένης επιφάνειας S) της οποίας το σύνορο αποτελείται από απλές κλειστές κατά τμήματα κανονικές καμπύλες $C_1, \dots, C_n$ θετικά προσανατολισμένο με εξωτερικές γωνίες θ_i. Τότε ισχύει:



$$\sum_i \int_{C_i} k_g + \iint_R k \, d\sigma + \sum_i \theta_i = 2\pi \chi(R)$$

Απόδειξη

Έστω $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_F\}$ τριγωνοποίηση έτσι $T_i \subset X_i(U_i)$ όπου X_i σύστημα συντεταγμένων όπως στο τοπ. Θεώρημα Gauss-Bonnet. Άρα, από τοπικό το Θεώρημα

$$\int_{\partial T_i} k_g + \iint_{T_i} k \, d\sigma + (\text{αθρ. εξωτερικών γωνιών του } T_i) = 2\pi$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, F\}$

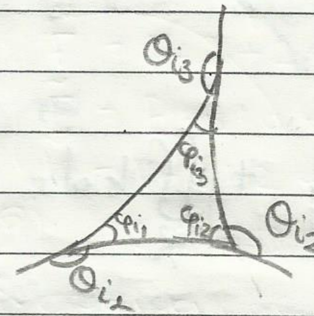
Αθροίζω ως προς i

$$\sum_i \int_{C_i} k_g + \iint_R k\, d\sigma + \underbrace{\sum (\text{εξωτερ. γωνιών όλων των τριγώνων})}_{\varphi} = 2\pi F$$

όπου $\sum_i (\text{αθρ. εξ. γωνιών του } T_i) = \sum_i (\theta_{i1} + \theta_{i2} + \theta_{i3}) =$

$= \sum_i (3\pi - \varphi_{i1} - \varphi_{i2} - \varphi_{i3}) =$

$= 3\pi F - \sum_i (\varphi_{i1} + \varphi_{i2} + \varphi_{i3})$ ①



$\varphi_{ij} = \pi - \theta_{ij}$
$j = 1, 2, 3.$

Μέτρηση:

E_i: πλήθος εσωτερικών ακμών
E_e: " συνοριακών "

$3F = 2E_i + E_e$

Άρα, ① $\varphi = 2\pi E_i + \pi \cdot E_e - \sum_i (\varphi_{i1} + \varphi_{i2} + \varphi_{i3})$ ②

V_i: πλήθος εσωτερικών κορυφών
V_e: " συνοριακών "

$$\sum_i (\varphi_{i1} + \varphi_{i2} + \varphi_{i3}) = 2\pi V_i + \sum_{\substack{\text{ως προς κορυφές} \\ \text{στο σύνορο}}} \varphi_{ij} \overset{③}{=} 2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{\substack{\text{εξωτερικές} \\ \text{που οφείλονται} \\ \text{στο σύνορο}}} (\pi - \theta_j)$$

$V_e = V_{et} + V_{ec}$ ③

εξωτερικές κορυφές που γεννιούνται από την τριγωνοποίηση — εξ. κορυφές που οφείλονται στο σύνορο

Άρα, ②: $\varphi = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum \theta_j =$

$= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi (V_{et} + V_{ec}) + \sum \theta_j =$

$= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum \theta_j =$

$= 2\pi E_i + 2\pi E_e - \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e + \Sigma \theta_j =$

$\underset{E_e = V_e}{=} 2\pi E - \pi V_e - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_j \theta_j =$

$= 2\pi E - 2\pi V_e - 2\pi V_i + \sum_j \theta_j =$

$= 2\pi E - 2\pi (\overbrace{V_e + V_i}) + \sum_j \theta_j =$

$= 2\pi (E - V) + \sum_j \theta_j .$

Αρα, ①,

$$\sum_i \int_{C_i} k_g + \iint_R k\,d\sigma + 2\pi(E-V) + \sum_j \theta_j = 2\pi F$$

$$\sum_i \int_{C_i} k_g + \iint_R k\,d\sigma + \Sigma \theta_j = 2\pi \chi(R).$$

<u>Πόρισμα</u> (ή Θεώρημα Gauss-Bonnet)
Για κάθε συμπαγή επιφάνεια S ισχύει

$$\iint_S k\,d\sigma = 2\pi \chi(S)$$

(Σύνδεση γεωμετρίας & τοπολογίας)

<u>Εφαρμογές</u>

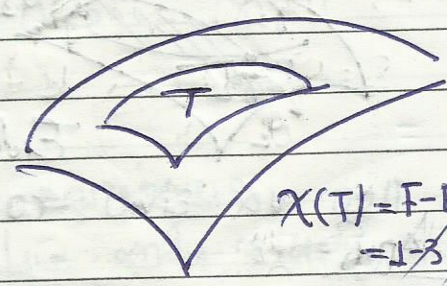
1) Αν S είναι συμπαγής προσανατολισμένη επιφάνεια με Καμπυλότητα Gauss $k>0$ παντού, τότε η S είναι ομοιομορφική με την S^2.

<u>Απόδειξη</u>

$$\iint_S k\,d\sigma = 2\pi \chi(S) \quad , \quad k>0 \Rightarrow \iint_S k\,d\sigma > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \chi(S) > 0 \Rightarrow \chi(S) = 2 = \chi(S^2) \Longrightarrow S$ ομοιομορφική με την S^2.

2) Έστω T γεωδαισιακό τρίγωνο με εξωτερικές γωνίες $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.
Τότε, $\sum_i \int_{c_i} k_g = 0$ άρα από Gauss-Bonnet:
Είναι:



$$\iint_T k\,d\sigma + \theta_1+\theta_2+\theta_3 = 2\pi \Leftrightarrow$$

$\chi(T) = F-E+V = 1-\cancel{3}+\cancel{3} = 1$

$$\iint_T k\,d\sigma + \pi-\varphi_1+\pi-\varphi_2+\pi-\varphi_3 = 2\pi \Rightarrow$$

$$\iint_T k\,d\sigma = \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3-\pi$$

<u>Συμπεράσματα</u>:
- Αν $k=0 \Rightarrow \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\pi$ (Ευκλ. Γεωμ.)
- Αν $k>0 \Rightarrow \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3 > \pi$ (Ελλειπτ. Γεωμ.)
- Αν $k<0 \Rightarrow \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3 < \pi$ (Υπερβολ. Γεωμ.)

Το Θεώρημα Gauss-Bonnet δείχνει ότι δεν ισχύει το αξίωμα των παραλληλίας

<u>Σχόλιο</u>
Αν $k = \sigma\tau\alpha\vartheta \neq 0 \Rightarrow k \iint_T d\sigma = \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3-\pi \Leftrightarrow$

$$k \cdot \text{Εμβ}(\text{Τριγώνου}(T)) = \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3-\pi$$